Tema 2:
Sucesiones y series.
(segunda parte)

Estructura del Tema 2 (primera parte):

- Series Convergentes. Algunos criterios de convergencia.
- Convergencia absoluta y condicional. Series alternadas.
- Series de números complejos.

Una **serie numérica** es la suma *infinita* de todos los términos de una sucesión numérica: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Serie numérica: Definición y convergencia

Una **serie numérica** es la suma *infinita* de todos los términos de una sucesión numérica: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

¿Cuándo es "sumable" una serie, e. d. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$?

Una **serie numérica** es la suma *infinita* de todos los términos de una sucesión numérica: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

¿Cuándo es "sumable" una serie, e. d. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$?

Se dice que una serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es **convergente** si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} a_n = L.$$

Se dice entonces que la suma de la serie es L.

Notación: Escribiremos $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n_0}^{\infty} a_n \quad$ o $\quad \displaystyle\sum^{\infty} a_n.$

Ejemplo 2.6: ¿Son sumables las siguientes series?

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{16}{17} + \cdots$$

Ejemplo 2.6: ¿Son sumables las siguientes series?

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad = \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad = \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \quad = \quad \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{16}{17} + \cdots$$

Obs.) Una condición **necesaria** pero **no suficiente** para la convergencia de una serie es que el término general tienda a cero:

Criterio del resto: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *diverge*

Ejemplo 2.6(3) (cont.): La serie $\displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ diverge ya que:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0\,.$

Algunos criterios de convergencia para términos positivos

En general, dada una serie convergente, no se podrá determinar el valor exacto de la suma, pero *nos es suficiente con saber si converge o no*.

Veremos los siguientes criterios que determinan cuándo una serie de términos positivos es convergente o no:

- Serie geométrica.
- Criterio de la integral (Serie p-armónica).
- Criterio del cociente.
- Criterio de la raíz.
- Criterio de comparación directa y en el límite.

Serie geométrica: *¿Es sumable la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$*?*

Serie geométrica: *¿Es sumable la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r - r^{N+1}}{1-r} = \begin{cases} \frac{r}{1-r} & si\ |r| < 1, \\ \infty & si\ r \geq 1, \\ \text{No existe} & si\ r \leq -1. \end{cases}$$

Serie geométrica: *¿Es sumable la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r - r^{N+1}}{1-r} = \begin{cases} \frac{r}{1-r} & si\ |r| < 1, \\ \infty & si\ r \geq 1, \\ \text{No existe} & si\ r \leq -1. \end{cases}$$

La serie $\sum_{n_0}^{\infty} r^n$ se denomina *serie geométrica de razón* r. Se verifica

$$\begin{cases} r < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n_0}^{\infty} r^n = \dfrac{r^{n_0}}{1-r} \text{ converge,} \\ r \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n_0}^{\infty} r^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Criterio de la integral.

Sea f una función definida en $[1, \infty)$, decreciente y positiva $\forall\, x \geq 1$. Dada $\{a_n\}$ tal que $a_n = f(n)$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \ \text{ y } \ \sum^{\infty} a_n \ \text{ convergen o divergen simultáneamente } \forall a \geq 1.$$

Ejemplo 2.7 (Ejerc.7(3)-Hoja 4): Estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Ejemplo importante: Serie p-armónica.

La serie $\sum^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se denomina *serie p-armónica* (armónica si $p = 1$).
Se verifica

$$\begin{cases} p > 1 & \Rightarrow & \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge,} \\ p \leq 1 & \Rightarrow & \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge.} \end{cases}$$

Ejemplo importante: Serie p-armónica.

La serie $\sum^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se denomina *serie p-armónica* (armónica si $p = 1$).
Se verifica

$$\begin{cases} p > 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge,} \\ p \leq 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.6 (1-2) (cont.):

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \text{e.d., diverge}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \text{e.d. converge}$$

Criterio del cociente:

Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Entonces

$$\begin{cases} \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ell = 1 \text{ el criterio no decide.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.8 (Ejerc.4-Hoja 4): Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}\,,$$

según los valores de $a > 0$.

Indicación: Utilizar la Fórmula de Stirling $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$

Criterio de la raíz:

Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Entonces

$$\begin{cases} \ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ \ell = 1 \text{ el criterio no decide.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.9: $\displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{2^n}}$.

Criterio de comparación directa.

Supongamos que se verifica $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$ para algún k. Entonces

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} b_n \text{ converge} & \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}, \\ \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} a_n \text{ diverge} & \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} b_n \text{ diverge}. \end{cases}$$

Ejemplo 2.10 (Ejerc.3(3)-Hoja 4): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Criterio de comparación en el límite.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, donde $0 < c < \infty$. Entonces ambas series tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen:

$$\text{Si } \{a_n\} \asymp \{b_n\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n_0}^{\infty} a_n \asymp \sum_{n_0}^{\infty} b_n$$

Ejemplo 2.11: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1} \right)$ converge si y solo si $a = b$.

Sea $\sum^{\infty} b_n$ una serie de términos *todos ellos negativos*, entonces $b_n = -a_n$, con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n_0}^{\infty} b_n = -\sum_{n_0}^{\infty} a_n$$

y se aplican los criterios vistos en la sección anterior.

Criterios de convergencia para series alternadas

Sea $\sum^{\infty} a_n$ una serie de términos *con signo cualquiera*:

- Se dice que **converge absolutamente** si la serie $\sum^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso *la serie dada también converge*:

$$\sum^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n < \infty \, .$$

Criterios de convergencia para series alternadas

Sea $\sum^{\infty} a_n$ una serie de términos *con signo cualquiera*:

- Se dice que **converge absolutamente** si la serie $\sum^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso *la serie dada también converge*:

$$\sum^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n < \infty \, .$$

- Se dice que **converge condicionalmente** si converge pero no absolutamente.

Obs.) Una serie puede ser convergente y no ser absolutamente convergente.

$$\sum^{\infty} a_n < \infty \quad \not\Rightarrow \quad \sum^{\infty} |a_n| < \infty \, .$$

Dada las serie alterna $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si $\sum^{\infty} b_n$ *converge* entonces $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ también *converge*:

$$\sum^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum^{\infty}(-1)^n b_n < \infty \,.$$

Series alternadas: $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$

Dada las serie alterna $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si $\sum^{\infty} b_n$ *converge* entonces $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ también *converge*:

$$\sum^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum^{\infty}(-1)^n b_n < \infty\,.$$

- El recíproco es **falso**: $\sum^{\infty}(-1)^n b_n < \infty \not\Rightarrow \sum^{\infty} b_n < \infty\,.$

Dada las serie alterna $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si $\sum^{\infty} b_n$ *converge* entonces $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ también *converge*:

$$\sum^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum^{\infty}(-1)^n b_n < \infty\,.$$

- El recíproco es **falso**: $\sum^{\infty}(-1)^n b_n < \infty \not\Rightarrow \sum^{\infty} b_n < \infty\,.$

Criterio de Leibniz.

Si la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces la serie alternada $\sum^{\infty}(-1)^n b_n$ converge.

Ejemplo 2.12: Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad (3) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

Dada una sucesión de números complejos

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + i\, y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales, la serie asociada se representa de la forma:

$$\sum^{\infty} z_n = \sum^{\infty}(x_n + i\, y_n) = \sum^{\infty} x_n + i \sum^{\infty} y_n\,.$$

Dada una sucesión de números complejos

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + i\, y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales, la serie asociada se representa de la forma:

$$\sum^{\infty} z_n = \sum^{\infty}(x_n + i\, y_n) = \sum^{\infty} x_n + i \sum^{\infty} y_n\,.$$

Por tanto, estudiar la convergencia de series de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de series de números reales:

- $\sum^{\infty} z_n$ converge si y solo si $\sum^{\infty} x_n$ y $\sum^{\infty} y_n$ convergen,
- $\sum^{\infty} z_n$ converge absolutamente si $\sum^{\infty} |z_n|$ converge,

con $\sum^{\infty} x_n\,, \sum^{\infty} y_n$ y $\sum^{\infty} |z_n|$ series de números reales.

Ejemplo 2.13: Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.